دانش موضوعی

معادله‌های شامل قدرمطلق

اژدر سلیمان‌پور باکفایت
دبیر ریاضی دبیرستان ماندگار شهید چمران، آموزش‌وپرورش ناحیهٔ ۱ ارومیه

اشاره

در این مقاله معادله‌های شـــامل مجموع و تفاضل جمله‌های $|ax+b|$ بررسی شده‌اند. یک بار علامت همهٔ جمله‌ها مثبت فرض شـــده و بار دیگر حالت کلی شامل جمله‌های مثبت و منفی است. با شناسایی نمودار تابع در هر حالت، روشی آسان و سریع برای حل آن معادله‌ها به‌دست آمده است. با استفاده از این روش، نامعادله‌های قدرمطلقی و نیز برخی از مسائل بهینه‌سازی نسبت به روش‌های معمول راحت‌تر حل می‌شوند. در این نوشتار با ذکر مثال‌هایی اثر روش جدید توضیح داده شده است.

کلیدواژه‌ها: معادلات قدرمطلق، بهینه‌سازی نامقید، آموزش ریاضی

سرآغاز

معادله‌های دارای قدرمطـــلق در مباحث متفاوت ریاضی ظاهـــر می‌شـــوند. موضوع اصلی از اینجا شـــروع شـــد که در کتاب «ریاضی عمومی ســـیلورمن» (سیلورمن، ۱۳۸۷)، روش حـــل معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=K$ را کـــه در آن K مثبت و a و b عددهای حقیقی هســـتند، به این صورت بیان می‌کند: حاصـــل $|x-a|$ برابر با فاصلهٔ x از a اســـت. مثـــلاً برای حل معادلـــهٔ $|x|+|x-1|=2$ نخی به طول ۲ را که دو انتهایش در نقطه‌های ۰ و ۱ محکم شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر نخ را تا نقطهٔ $\frac{3}{2}$، یعنی نصف واحد به راست ۱، یا به نقطهٔ $-\frac{1}{2}$، یعنی نصف واحد به چپ ۰، بکشـــیم، نخ محکم کشیده می‌شود. به عبارت دیگر، معادله دارای دو جواب $x=\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ است.

این روش، خیلی ســـریع جواب‌ها را مشخص می‌کند، اما اگر بین قدرمطلق‌ها منفی داشته باشیم، یا تعداد قدرمطلق‌ها بیشـــتر از دو تا باشـــد، آن‌گاه این روش کاربرد ندارد. چالشی که با آن مواجه بودیم، تعمیم چنین روشـــی به حالت‌هایی با جمله‌های بیشتر و علامت منفی بین جمله‌ها بود. در مواجهه با این چالش، روش حل کلی دســـته‌بندی شد، به‌طوری که با کمترین تعداد اعمال محاسباتی بتوان جواب را یافت. در حالت کلی، معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(X)=\pm|a_1x+b_1|\pm\ldots\pm|a_nx+b_n|=K \qquad (1)$$

که در آن همهٔ a_i ها $(i=1,\ldots\ldots,n)$ مثبت فرض می‌شـــوند. بدیهـــی اســـت در صورتی که یکی از ضرایب a_i منفی باشـــد، می‌توان داخل آن قدرمطلق را قرینه کرد. در هر جمله ضریب قدرمطلق فقط یکی از علامت‌های مثبت یا منفی را دارد. مقدار K نیز آزاد است و می‌تواند منفی، مثبت یا صفر باشد.

بیان مسئله با جمله‌های دارای ضریب‌های مثبت

در این بخش، شـــرایط وجود جواب و محاسبهٔ جواب‌های دقیق معادلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=|a_1x+b_1|+\ldots+|a_nx+b_n|=K$$

که در آن همهٔ a_i ها $(i=1,\ldots\ldots,n)$ مثبت هستند. مقدار K نیز نامنفی فرض می‌شـــود، زیرا در صورت منفی بودن، معادلهٔ (۱) جواب ندارد. لم۱شرایط کافی برای وجود و تعداد جواب‌ها در حالت کلی را بیان می‌کند.

لم ۱. معادلهٔ (۲) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید:

$$M=\min\{f(x_i)|i=1,...,n\} \qquad (3)$$

که در آن: $x_i=\frac{b_i}{a_i}$. در این صورت:

الف) اگر $K<M$، آن‌گاه معادلهٔ (۲) جواب ندارد.

ب) اگر $M=K$ و مقدار M در یک اندیس منحصر به‌فرد رخ دهد، یعنی اندیسی مانند j موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$M=f(x_j)$$

آن‌گاه: $x=x_j$ تنها جواب معادله است.

ج) اگر مقدار M در دو اندیس متوالی رخ دهد،یعنی:

$$M=f(x_j)=f(x_j+1)$$

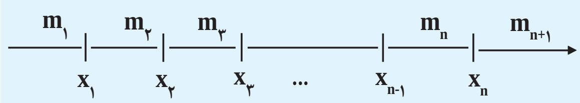
آن‌گاه هر عدد از بـــازهٔ $[x_j,x_{j+1}]$ جوابی از (۲) خواهد بود.

د) اگر: $M>K$، آن‌گاه معادلهٔ (۲) دارای دو جواب متمایز است.

اثبات: فرض کنید:

$$f(x)=|a_1x+b_1|+...+|a_nx+b_n| \qquad (4)$$

در معادلهٔ (۴)، جملهٔ i ام دارای ریشهٔ x_i و نمودار f بین هر دو ریشهٔ متوالی با یک پاره‌خط معادل است. نمودار در هر یک از دو انتها، معادل با یک نیم‌خط است. موقعیت ریشه‌ها و شیب f بین ریشه‌ها مانند شکل ۱ در نظرگرفته می‌شود.



شکل ۱. موقعیت ریشه‌ها و شیب تابع بین آن‌ها

شکل ۲. نمودار تابع f در دو انتهای نامتناهی

چون ضریب‌های a_i مثبت هستند، می‌توان نوشت:

$$m_1=-\sum_{k=1}^{n}a_k<0 \quad , \quad m_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k>0 \qquad (5)$$

به همین ترتیب با توجه به علامت داخل قدرمطلق‌ها داریم:

$$m_2=a_1-\sum_{k=2}^{n}a_k \quad , \quad m_3=a_1+a_2-\sum_{k=3}^{n}a_k \qquad (6)$$

در حالت کلی، شـــیب تابع f بین دو ریشهٔ x_i و x_{i+1} عبارت است از:

$$m_{i+1}=\sum_{k=1}^{i}a_k-\sum_{k=i+1}^{n}a_k \qquad (7)$$

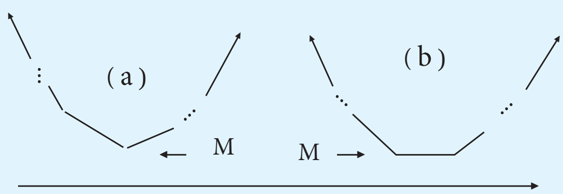
چنـــد حالت خاص وجود دارد که نمودار f نمی‌تواند دارای آن حالت‌ها باشد. این حالت‌ها به شرح زیر هستند:

● نشـــان می‌دهیـــم رابطـــهٔ $m_{i+1}<m_i$ بـــه ازای هیچ iیی نمی‌تواند برقرار باشد (فرض خلف). اگر اندیسی مانند i وجود داشته باشد، به‌طوری که: $m_{i+1}<m_i$، آن‌گاه:

$$\sum_{k=1}^{i}a_k-\sum_{k=i+1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{i-1}a_k-\sum_{k=i}^{n}a_k \qquad (8)$$

پس از ساده کردن جمله‌های مشابه از طرفین داریم: $a_i<-a_i$

و در نتیجه: $a_i<0$ که یک تناقض است.



شکل ۳. دو حالت کلی نمودار تابع f

● در هیچ دو زیربازه‌ای شیب صفر نمی‌شود. مشابه قسمت قبلی ثابت می‌شـــود، در صورت صفر بودن شیب، مجموع a_iها برابر صفر می‌شود که تناقض است.

● اگـــر: $m_i>0$، آن‌گاه در هیـــچ زیربازهٔ بعد از زیربازهٔ iام، شیب نمی‌تواند صفر باشـــد. به‌عبارت دیگر، اگر: $m_i>0$ و$(i\leq j)$ $m_j=0$، آن‌گاه نشان می‌دهیم تناقضی حاصل می‌شود:

$$m_i>0\to\sum_{k=1}^{i-1}a_k-\sum_{k=i}^{n}a_k>0\to\sum_{k=1}^{i-1}a_k>\sum_{k=i}^{n}a_k \qquad (9)$$

و:

$$m_j=0\to\sum_{k=1}^{j-1}a_k=\sum_{k=j}^{n}a_k \qquad (10)$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۹) و سپس (۱۰) داریم:

$$2\sum_{k=i}^{j-1}a_k<0\to a_i+...+a_{j-1}<0 \qquad (11)$$

رابطهٔ (۱۱) یک تناقض است.

با توجه به سه حالت غیرممکن برای نمودار تابع f می‌توان گفت که نمودار این تابع در حالت کلی به فرم یکی از حالت‌های نشان داده‌شده در شکل ۳ است. با توجه به شکل کلی تابع f بنا به شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت احکام لم برقرارند.

جواب‌هـــای معادلهٔ (۲) با توجه به تعریـــف M در لم ۱ و نسبت به K به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۱. اگر مقدار M در یک اندیس منحصربه‌فرد مانند t رخ دهد و: $K=M$، آن‌گاه معادلهٔ (۲) تنها یک ریشه به نام $x=x_t$ دارد.

۲. اگر مقدار M در دو اندیس متوالی i و i+1 رخ دهد، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد و هر عدد متعلق به بازهٔ $[x_i , x_{i+1}]$ جواب است.

۳. اگر: $c = i,...., j$ ، $K > f_c$ و $m \neq c$ ، $K < f_m$ ، آن‌گاه یک ریشهٔ معادله در $[x_{i-1}, x_i]$ و ریشهٔ دیگر در $[x_j, x_{j+1}]$ قرار دارد. اگر ریشهٔ $x = x_0$ در بازهٔ $[x_p, x_{p+1}]$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} K - f_p & k - f_{p+1} \\ x_p & x_{p+1} \end{vmatrix}}{f_{p+1} - f_p} \qquad (۱۲)$$

در نتیجه هر دو ریشه، با توجه به بازه متناظر خود به‌طور مجزا از فرمول (۱۲) قابل محاسبه است.

۴. اگر: $K>f_n$، آن‌گاه ریشه‌ای به نام $\overline{x}$ متعلق به بازهٔ $(x_n, +\infty)$ است و در صورتی‌که: $K>f_1$، آن‌گاه ریشه‌ای به نام $\underline{x}$ در بازهٔ $(-\infty, x_1)$ وجود دارد. همچنین:

$$\overline{x} = \frac{K - \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \quad \underline{x} = \frac{K + \sum_{i=1}^{n} b_i}{-\sum_{i=1}^{n} a_i} \qquad (۱۳)$$

۵. اگر: $K = f_i$ به ازای اندیسی مانند i، آن‌گاه $x = x_i$ جواب معادله است.

حالت کلی

در این بخش، معادلهٔ (۱) را در نظر می‌گیریم که با معادلهٔ زیر معادل است:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} |a_i x + b_i| - \sum_{i=1}^{k'} |a'_i x + b'_i| = K \qquad (۱۴)$$

درواقع جمله‌هایی که ضریب منفی دارند، با هم و جمله‌های دارای ضریب مثبت نیز با هم نوشته شده‌اند. مانند معادلهٔ (۲)، داخل هر قدرمطلق ریشه‌ای مانند x_i دارد. دو مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

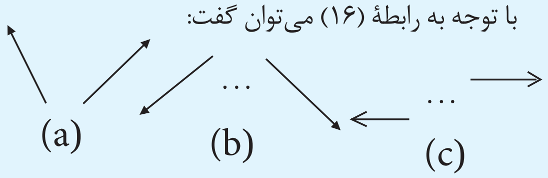
$$X = \{x_1, ..., x_n\}, \ x_1 < x_2 < ... < x_n, \ F_i = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \qquad (۱۵)$$

که در آن‌ها داریم: $n = k + k'$. نمودار تابع F در تحلیل جواب‌های معادلهٔ (۱۴) نقش مهمی دارد. چون تابع قدرمطلق همواره پیوسته است، در نتیجه تابع F پیوسته است. واضح است در هر زیربازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ یک پاره‌خط است. در دو بازهٔ انتهایی $(-\infty, x_1]$ و $[x_n, +\infty)$ نمودار F یک نیم‌خط با شیب‌های زیر است:

$$m_1 = -\sum_{i=1}^{b} a_i + \sum_{i=1}^{b'} a'_i, \quad m_{n+1} = \sum_{i=1}^{b} a_i - \sum_{i=1}^{b'} a'_i \qquad (۱۶)$$

معادله‌های دارای قدرمطلق در مباحث متفاوت ریاضی ظاهر می‌شوند. موضوع اصلی از اینجا شروع شد که کتاب «ریاضی عمومی سیلورمن»، روش حل معادلهٔ $|x-a|+|x-b| = K$ را که در آن K مثبت و a و b عددهای حقیقی هستند، به این صورت بیان می‌کند: حاصل $|x-a|$ برابر با فاصلهٔ x از a است

با توجه به رابطهٔ (۱۶) می‌توان گفت:



شکل ۴. نمودار تابع F در دو انتها

- $m_1 = 0$، اگر و تنها اگر: $m_{n+1} = 0$.
- $m_1 > 0$ ($m_1 < 0$) اگر و تنها اگر: $m_{n+1} < 0$ ($m_{n+1} > 0$).

با توجه به دو مورد فوق می‌توان نتیجه گرفت نمودار تابع F در دو انتهای بی‌نهایت به یکی از صورت‌های موجود در شکل ۴ است.

نمودار F در هر یک از سه حالت نشان داده‌شده در شکل ۴، در هر زیربازه یک پاره‌خط است و شیب منفی، مثبت یا صفر دارد. برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ (۱۴) از یک روش جست‌وجوی ساده استفاده می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های x_i را به ترتیب از کوچک به بزرگ در نظر می‌گیریم و مقدار تابع F را در آن‌ها پیدا می‌کنیم. با توجه به مقدار K و تقریبی از نمودار F که با استفاده از نقطه‌های با مختصات (x_i, f_i) به‌دست آمده است، و چند قانون زیر، ریشه‌ها به‌راحتی پیدا می‌شوند:

۱. اگر: $K = f_i$، آن‌گاه $x = x_i$ ریشه‌ای از معادله است. ممکن است اندیس i منحصربه‌فرد نباشد.

۲. اگر: $m_1 < 0$ و $K > f_1$، یا اگر: $m_1 > 0$ و $K < f_1$، آن‌گاه یک ریشه به نام $\underline{x}$ در بازهٔ $(-\infty, x_1)$ وجود دارد که به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$\underline{x} = \frac{K - \sum_{i=1}^{k'} b'_i + \sum_{i=1}^{k} b_i}{\sum_{i=1}^{k'} a'_i - \sum_{i=1}^{k} a_i} \qquad (۱۷)$$

دلیل رابطهٔ (۱۷) واضح است. زیرا در بازهٔ $(-\infty, x_1)$ داخل همهٔ قدرمطلق‌ها منفی است. اگر: $m_1 = 0$، آن‌گاه در صورتی‌که: $K = f_1$، تمام نقطه‌های بازهٔ $(-\infty, x_1]$ جواب هستند. در غیر این صورت مراحل بعدی را ادامه می‌دهیم.

۳. بازه‌ها را از اولین بازه مورد بررسی قرار می‌دهیم. در زیربازه‌ای مانند $[x_p, x_{p+1}]$، اگر K بین f_p و f_{p+1} باشد، آن‌گاه ریشه‌ای در این بازه قرار دارد و از فرمول (۱۲) قابل محاسبه

است. اگر: $K = f_p = f_{p+1}$، آن‌گاه تمام نقطه‌های بازهٔ $\left[x_p, x_{p+1}\right]$ ریشه هستند.

۴. پس از پیمایش همه زیربازه‌ها به بازهٔ $\left[x_n, +\infty\right)$ می‌رسیم. اگر: $m_{n+1}<0$ و $K < f_n$، یا اگر: $m_{n+1}>0$ و $K > f_n$، آن‌گاه یک ریشه به نام $\overline{x}$ در بازهٔ $\left(x_n, +\infty\right)$ وجود دارد که به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$\overline{x} = \frac{K + \sum_{i=1}^{k'} b'_i - \sum_{i=1}^{k} b_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k'} a'_i} \qquad (18)$$

دلیل رابطهٔ (۱۸) واضح است. زیرا در بازهٔ $\left(x_n, +\infty\right)$ داخل همهٔ قدرمطلق‌ها مثبت است. اگر: $m_{n+1}=0$، آن‌گاه در صورتی‌که: $K = f_n$،تمام نقطه‌های بازهٔ $\left[x_n, +\infty\right)$ جواب هستند.

مثال ۱. دامنهٔ تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \sqrt{|x-7| + |2x-1| + |3x+2| - 12} + \frac{1}{\sqrt{|3x-12| + |x+2| - |2x+1| + 10}}$$

توجه داریم که نامنفی بودن زیر رادیکال‌ها برای یافتن مقدار x ما را به حل دستگاه زیر می‌رساند:

$$\begin{cases} |x-7| + |2x-1| + |3x+2| \geq 12 \\ |2x+1| - |3x-12| - |x+2| < 10 \end{cases} \qquad (19)$$

نامعادلهٔ اول را به‌صورت مساوی در نظر می‌گیریم. مقادیر در ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$f(x_3 = 7) = 36, \quad f(x_2 = \frac{1}{2}) = 10, \quad f(x_1 = -\frac{2}{3}) = 10 \qquad (20)$$

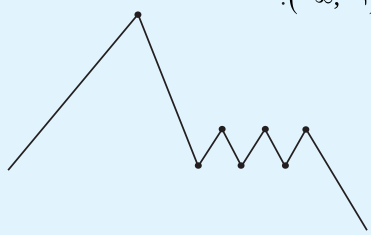
در نتیجه: $M=10$. چون: $10<K=12<36$، در نتیجه دو ریشه عبارت‌اند از: $\underline{x} = -1$ و $\overline{x} = 1$. چون نمودار معادلهٔ اول مانند شکل ۳ قسمت (b) است،در نتیجه جواب نامعادلهٔ اول برابر است با: $\left(-\infty, -1\right) \cup \left[1, +\infty\right)$.
نامعادلهٔ دوم به‌صورت تساوی دارای نموداری شبیه شکل ۴ قسمت (b) است. مقادیر این تابع در ریشهٔ جمله‌ها برابرند با:

$$f(x_1 = -\frac{11}{2}) = -32, \quad f(x_2 = -2) = -11, \quad f(x_3 = 4) = 13 \qquad (21)$$

در نتیجه ریشه‌ها $3/25 = \frac{78}{24}$ و $5/5 = \frac{11}{2}$ هستند. با توجه به نمودار که از مقادیر عددهای (۲۱) و علامت آن‌ها حاصل می‌شود، جواب نامعادلهٔ دوم عبارت است از:

$$\left(-\infty, 3/25\right) \cup \left(5/5, +\infty\right) \qquad (22)$$

در نهایت جواب دستگاه یا همان دامنهٔ تابع برابر است با: $\left(-\infty, -1\right) \cup \left(5/5, +\infty\right)$.



شکل ۵. نمودار تابع F مربوط به مثال

مثال ۲. آیا عددی حقیقی مانند x وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۳، ۱، ۶- و ۵ برابر با مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۰، ۲ و ۴ باشد؟ همچنین آیا عددی حقیقی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۰، ۲ و ۴ منهای مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۶-، ۱، ۳ و ۵ برابر ۱۰- باشد؟ آیا جواب منحصربه‌فرد است؟ برای پاسخ به هر دو قسمت تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = |x| - |x-1| + |x-2| - |x-3| + |x-4| - |x-5| - |x+6| = K$$

مقادیر تابع F در ریشه‌های جمله‌ها عبارت‌اند از:

$$F(-6) = -3, \quad F(0) = -9, \quad F(1) = -8, \quad F(2) = -9$$
$$F(3) = -8, \quad F(4) = -9, \quad F(5) = -8$$

با توجه به این مقادیر، نمودار F مانند شکل ۵ است.
در نتیجه، معادله به ازای $K<-9$، دارای دو ریشه، به ازای $K=-9$ دارای ۵ ریشه، به ازای $-9<K<-8$ دارای ۸ ریشه، به ازای $K=-8$ دارای ۵ ریشه، به ازای $-8<K<-3$ دارای دو ریشه و به ازای $K=-3$ دارای یک ریشه برابر $x=-6$ است. اگر: $K>-3$، معادله ریشه ندارد. در نتیجه قسمت اول جواب ندارد. اما در قسمت دوم دو جواب موجود است که برای یافتن آن‌ها از رابطهٔ (۱۲) استفاده می‌کنیم.

سؤالی برای کار بیشتر

مسئلهٔ بهینه‌سازی نامقید زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min f(x) = \sum_{n=2}^{10} \left| \frac{n-1}{n} x + n \right| \qquad (23)$$

آیا این مسئله دارای جواب است؟
اگر تعداد (n) را به ۱۰۰ افزایش دهیم، چه تغییری در جواب حاصل می‌شود؟ آیا با افزایش مقدار n وجود جواب و تعداد جواب‌ها تغییر می‌کند؟

منبع

۱. سیلورمن، ریچارد ا. (۱۳۸۷). حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی (ج ۱). ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. انتشارات ققنوس. تهران.